

最高學習滿意度

1 問題摘要

在這個充滿機會及挑戰的時代，文山區某一流學府的學生漸漸意識到多元學習及培養第二專長的重要性，許多人文社科學生紛紛選修了該校少數的理工領域課程。某一門物理課助教正考慮將課堂上 101 名學生分班進行演習課。這名盡責且貼心的助教先利用問卷來瞭解每位學生間的磨合度，再將學生分成 A 、 B 兩班。分班的原則是將兩位磨合度好的同學編在同一班，將兩位磨合不佳的同學編在不同班，如此可提高學生的學習滿意度。請協助這名物理助教依據上述分班原則，分發每位學生的班別，使整體學習滿意度最高。

2 題目

題目資料檔裡有三行數據，第一、二行分別列出兩名學生的編號，第三行給出兩名學生間的磨合指標 W ，共有 $101 \times 100/2 = 5050$ 組磨合指標。正的磨合指標 ($W > 0$) 表示好的磨合度，宜將這兩名學生安排在同一班，如此可獲學習滿意度 W ；反之，若將這兩名學生安排在不同班，將減少學習滿意度 W 。負的磨合指標 ($W < 0$) 表示不佳的磨合度，若這兩名學生被分配在同一班，學習滿意度將減少 W ，這兩名學生若在不同班，則將增加學習滿意度 W 。

以編號為 1 及 2 兩名學生為例，假設編在 A 班與 B 班分別以 $+1$ 及 -1 表示，我們可將他們的學習滿意度表示為 $e_{1,2} = W_{1,2}S_1S_2$ ，其中 $S_1 = \pm 1$ ， $S_2 = \pm 1$ 表示 1 號學生及 2 號學生被分配的班別， $W_{1,2}$ 為這兩名學生的磨合指標。 $e_{1,2} > 0$ 表示獲學習滿意度 $W_{1,2}$ ， $e_{1,2} < 0$ 則表示減少滿意度 $W_{1,2}$ 。整體學習滿意度由每一對學生的（正或負）學習滿意度 $e_{i,j}$ 加總而成：

$$E = \sum_{i,j} e_{i,j} = \sum_{i,j} W_{i,j} S_i S_j$$

為排除 $e_{i,j} = e_{j,i}$ 的重複計算，上式中的 $\sum_{i,j}$ 限用於 $i < j$ 。請僅依據題目所給定的 5050 組磨合指標 $W_{i,j}$ ，不考慮每班人數等其他條件，找出理想的 101 名學生班別分配 $\{S_1, S_2, \dots, S_{101}\}$ ，使整體學習滿意度 E 值儘可能最大（最高）。

3 範例

考慮僅 4 名學生的課程，給定如下的學生磨合指標

學生 i	學生 j	$W_{i,j}$
1	2	-0.1043
1	3	0.5795
1	4	0.6112
2	3	0.5665
2	4	-0.4981
3	4	-0.0751

依據 E 定義，我們得出最高滿意度為 $E = 1.2757$ （不重複計算 $W_{i,j}$ 及 $W_{j,i}$ ），所對應的最佳班別分配為：

$$A \ B \ B \ A$$

或

$$B \ A \ A \ B$$

也就是學生 1 及學生 4 在同一班，學生 2 及學生 3 同在另一班。第二高的滿意度為 $E = 1.1515$ ，對應的分配為 2 號學生獨待一班，其他三位學生在另一班。

4 補充資訊

競賽題目涉及 $2^{101} = 2535301200456458802993406410752$ 天文數目大的不同分配組合！為了解決此類組合最佳化問題，具特定功能的高效率量子電腦，或量子啟發式電腦，已被研發建構出來了。當然，沒有量子電腦，大家還是可以動腦透過傳統電腦找儘可能的最佳解喔！

值得一提，有些磁性合金材料的低溫性質可用雷同競賽題目的模型來描述，為所謂的「自旋玻璃」（spin glass）。去年 2021 年諾貝爾物理獎得主 Giorgio Parisi，研究專長在於自旋玻璃等複雜物理系統，他在物理的研究貢獻被譽為：發現從原子到行星尺度物理系統的無序與波動之交互。

5 競賽規則

- 本競賽參加者須為本校大學部在學學生。
- 可1至最多3人組隊參加，每人限參加1組隊伍。
- 參賽作品須包含
 - * 101名學生的班別分配。班別須依學生編號順序由左起以A或B表示，儲存於純文字檔（參見範例解答），各A或B字母間以空格分開。且一個檔案僅容許儲存一種分配組合，即包含101個A或B。
 - * 滿意度E值
 - * 詳細求解方法。求解方法若涉及電腦程式，須上傳程式碼。
- 參賽獎勵
 - * **最佳解答獎**：頒發**2萬元**獎勵金，由解出符合題意且滿意度E值相對最高者獲得。若有答案相同之作品，評審老師將依所繳交的解法說明內容，擇優選出一件最佳解答獎。
 - * **最具創意獎**：頒發**1萬元**獎勵金，由評審老師選出最具創意解法的參賽作品。「最具創意獎」與「最佳解答獎」可由同一參賽隊伍獲得。
 - * **幸運參加獎**：頒發**3000元**獎勵金，將從繳交完整解答的參賽隊伍中隨機選出一組。此獎項排除「最佳解答獎」及「最具創意獎」的得獎隊伍。
- 活動時間
 - * 2022/11/05前，完成報名，報名網址：<https://forms.gle/3sF7H7QRoqdhBFmXA>（主辦單位確認參賽資格後將以E-mail通知）
 - * 2022/12/05前，各隊繳交解答，網址另行通知。
 - * 2022/12/14公佈獲「最佳解答獎」及「最具創意獎」名單，並公開抽出「幸運參加獎」。
- 主辦單位將於「電子物理學士學位學程」網頁公告獲獎者及獲獎作品資訊。